Математический бой

«Как попасть в 10 класс?»

1. На прямой выбрано $2n+1$ отрезков. Каждый из этих отрезков пересекает не менее n других выбранных отрезков. Докажите, что один из отрезков пересекает все остальные.

2. Пусть $\mathbb{R}_+$ — множество положительных действительных чисел. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, что при всех $x, y > 0$ выполняется равенство
$$f(x)f(y) = f(xy) + 2007\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2006\right).$$

3. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно стороне BC в точках C_2 и B_2 соответственно. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

4. Найдите все пары натуральных чисел m, n, которые удовлетворяют равенству
$$\sqrt{m} + \frac{2007}{\sqrt{n}} = 2008.$$

5. Для действительных чисел $x, y, z \in [0,1]$ докажите неравенство
$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \leqslant 1.$$

6. Решите уравнение $\sqrt{x^5 + x^3 + x - 42} = x\sqrt{2-x}$.

7. Найдите все такие натуральные числа n, что каждая из цифр 0, 1, …, 9 встречается в десятичной записи ровно одного из чисел $6n$, $9n$, $13n$, причем только один раз.

8. Первого сентября на линейке всех лицеистов 10-М класса выстроили в колонну по одному и каждому на голову одели колпак желтого или синего цвета. Каждый лицеист видит, какого цвета колпаки у лицеистов перед ним, но не видит ни свой колпак, ни колпаки лицеистов до него. Сергей Ильич по очереди, начиная с самого заднего лицеиста (того, кто видит всех остальных), подходит к каждому лицеисту и предлагает угадать, какого цвета у него на голове колпак. Лицеистов, которые не смогли угадать цвет своего колпака, Сергей Ильич отправляет учиться в 7-й класс.

   Каждый лицеист слышит, какие цвета называют лицеисты сзади него, и слышит вердикт Сергея Ильича (угадал или нет).

   Перед началом линейки у лицеистов есть возможность обсудить и договориться о стратегии угадывания. Какая стратегия позволит наибольшему числу лицеистов гарантированно (независимо от удачи) попасть в 10 класс?

9. Найдите все такие функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что при любых действительных x, y выполняется равенство
$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y).$$

10. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ на сторонах AB и CD выбраны точки K и N соответственно таким образом, что $CK = DK$ и $AN = BN$. Пусть $BN \cap CK = S$, $AN \cap DK = M$, причем $KM = KA$, $NM = ND$. Биссектрисы углов ABN и DCK пересекают отрезки KD и NA в точках Q и R соответственно.

    (a) Докажите, что прямая NA содержит биссектрису угла SND.

    (b) Докажите, что точки S, Q и R лежат на одной прямой.