# Математический бой

«Все могут короли...»

1. На сторонах $BC$, $AC$, $AB$ треугольника $ABC$ отметили точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ соответственно так, что $\angle AC_1B_1 = \angle B_1A_1C$, $\angle BA_1C_1 = \angle C_1B_1A$, $\angle CB_1A_1 = \angle A_1C_1B$. Докажите, что прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке.

2. Пусть $n$ — такое натуральное число, что уравнение $xy = n(x + y)$ имеет ровно 2007 пар $(x, y)$ натуральных чисел, которые являются его решениями.

   Может ли $n$ быть точным квадратом?

3. В окрестности Пупа Земли расположено королевство Пупземелье, карта которого выглядит как шахматная доска $8 \times 8$. Каждый день шахматный король Пупземелья Пупий XIII выходит из замка (который расположенв в одной из клеток), обходит свои владения и возвращается обратно в замок.

   При этом Пупий двигается как и любой другой шахматный король, но у него есть отличительная черта: он любит разнообразие и поэтому никогда во время обхода не проходит дважды по одной клетке.

   Придворные статистики Пупия подсчитали количество «диагональных» ходов, которые делает король во время обхода, и обнаружили, что это число неизменно четное, чем изрядно расстроили Пупия, который любит разнообразие. Есть ли у него возможность разнообразить свой променад и совершить во время обхода нечетное число «диагональных» ходов?

4. Функция $f$ определена на отрезке $[0; 1]$, принимает действительные значения и при всех $x \in [0; 1]$ удовлетворяют равенству $f(x + f(x)) = f(x)$. Докажите, что $f(x) \equiv 0$ на $[0; 1]$.

5. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такова, что $a_1 = 0$, $|a_2| = |a_1 + 1|$, ..., $|a_n| = |a_{n-1} + 1|$. Доказать, что среднее арифметическое всех чисел не меньше $-1/2$.

6. Найти все $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которые при всех $x, y \in \mathbb{R}$ удовлетворяют равенству

   $$f(x + y) = \{f(x)\} + \{f(y)\}.$$

   ($\{a\} = a - [a]$ — дробная часть числа $a$.)

7. Пусть $a, b, c > 0$, $abc = 1$. Докажите равенство

   $$\frac{1}{1 + a + ab} + \frac{1}{1 + b + bc} + \frac{1}{1 + c + ca} = 1.$$

8. Найдите все пары натуральных чисел $m, n$, которые удовлетворяют равенству

   $$1! + 2! + \ldots + m! = n^2.$$

9. Три окружности одинакового радиуса проходят через точку $H$; $A$, $B$ и $C$ — точки их попарного пересечения, отличные от $H$. Докажите, что $H$ — ортоцентр треугольника $ABC$.

10. Пусть $x$ и $y$ — положительные числа, для которых $x + y = 1$. Докажите, что

    $$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 9.$$