Математический бой

«Формула любви»

1. Пусть $a, b, c, d > 0$, $a + b + c + d = 4$. Докажите неравенство
$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leqslant 4.$$

2. Квадраты AB_cB_aC, CA_bA_cB и BC_aC_bA построены на сторонах треугольника ABC вне его. Квадрат $B_cB_c'B_a'B_a$ с центром P лежит вне квадрата AB_cB_aC. Докажите, что прямые BP, C_aB_a и A_cB_c пересекаются в одной точке.

3. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство
$$f(x - f(y)) = 4f(x) - f(y) - 3x.$$

4. Пусть m — натуральное число. Последовательность $\{a_n\}$ определяется равенствами[1] $a_1 = \frac{m}{2}$, $a_{n+1} = a_n \lceil a_n \rceil$. Найдите (хотя бы одно) m, для которого a_{2007} будет первым целым числом в этой последовательности.

5. Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами такие, что $P(0) = 0$ и
$$P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1.$$

6. Окружность ω лежит внутри окружности γ и касается ее в точке T. Хорда AB окружности γ касается окружности ω в точке M. Докажите, что луч TM является биссектрисой угла ATB.

7. Найдите все пары натуральных чисел m, n таких, что выполнено равенство
$$(m^2 - n^2)^2 = 16n + 1.$$

8. В брачном агентстве «Любовь зла»[2] зарегистрированы n мужчин и n женщин. В результате вечеринки, устроенной агентством, все клиенты перезнакомились между собой и каждый из них составил список предпочтений — список клиентов противоположного пола[3], упорядоченный в соответствии с личными симпатиями клиента. Будем говорить, что клиенту A клиент B нравится больше, чем C, если B расположен в списке предпочтений клиента A выше, чем C.

   Далее агентство должно подобрать каждому своему клиенту пару (из числа клиентов другого пола) и заключить n браков.

   Перед агентством стоит задача образовать *стабильные браки.* Признаком *нестабильности* образованных браков является наличие такого мужчины M и женщины F, которые не состоят в браке, причем F нравится M больше, чем его жена, а M нравится F больше, чем ее муж[4].

   Всегда ли такая задача выполнима?

9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство
$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y.$$

10. Точки A', B', C' симметричны соответствующим вершинам треугольника ABC относительно точки P. Параллельные прямые, проходящие через A', B', C' пересекают прямые BC, AC, AB в точках X, Y, Z. Докажите, что точки X, Y, Z коллинеарны.

---

[1] здесь $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, не меньшее x.

[2] полюбишь и козла.

[3] в нашей стране все браки разнополые.

[4] ибо тогда M и F расторгнут свои браки и образуют новый.